Автоматика и телемеханика, № 3, 2025

Нелинейные системы

© 2025 г. А.И. МАЛИКОВ, д-р физ.-мат. наук (aimalikov@kai.ru)
(Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ)

ОЦЕНИВАНИЕ СОСТОЯНИЯ И СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНО-ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ С НЕОПРЕДЕЛЕННЫМИ ВОЗМУЩЕНИЯМИ[1]

Рассматривается нелинейная непрерывно-дискретная система, подверженная воздействию ограниченных внешних возмущений. На основе метода матричных систем сравнения и техники дифференциально-разностных линейных матричных неравенств решаются задачи нахождения эллипсоида, ограничивающего состояния, подавления начальных отклонений и неопределенных возмущений с помощью обратной связи по состоянию, доступному в дискретные моменты времени. Предлагается способ синтеза дискретного управления, обеспечивающего на конечном интервале подавление начальных отклонений и влияние неопределенных ограниченных по L_∞ норме возмущений.

Ключевые слова: система с непрерывной и дискретной подсистемами, липшицевые нелинейности, неопределенные возмущения, оценивание состояния, дискретное управление, дифференциально-разностные линейные матричные неравенства.

DOI: 10.31857/S0005231025030013, **EDN:** IEZXZO

1. Введение

Обыкновенные дифференциально-разностные уравнения давно стали предметом исследования [1–6] в связи с изучением уравнений с частными производными и уравнений с запаздыванием. В литературе отмечалось (см. [3, 7] и ссылки в них), что многие сложные инженерные системы, представленные уравнениями в частных производных или с запаздыванием, можно аппроксимировать или представить более простыми моделями в виде дифференциально-разностных уравнений. Взаимосвязанные дифференциально-разностные уравнения также являются важным классом потому, что они представляют модели систем, в которых используются цифровые вычисления на компьютерах [3] или дискретные данные, получаемые через коммуникационную сеть [1] для активного управления объектами с непрерывным

[1] Работа выполнена частично за счет предоставленного в 2024 году Академией наук Республики Татарстан гранта на осуществление фундаментальных и прикладных научных работ.

временем. Они также возникают при моделировании производственных процессов, дорожного движения, биологических процессов в природе, которые развиваются непрерывно во времени, а также управляются дискретными событиями, которые изменяют их параметры или состояние [3].

Дифференциально-разностные уравнения относятся к классу гибридных систем, так как представляют разнородные взаимодействующие процессы, происходящие в непрерывном и дискретном времени. В последние годы большое внимание уделяется исследованию устойчивости систем с дискретными данными, которые также могут быть представлены дифференциально-разностными уравнениями (см. обзор [8] и ссылки в нем). Сюда же относятся задачи управления системой с непрерывным временем с помощью дискретного регулятора или управления сетевыми системами, в которых многие компоненты имеют динамику в непрерывном времени, в то время как другие развиваются только в дискретные моменты времени. В [8] рассмотрены существующие подходы к анализу устойчивости и синтезу систем с дискретными данными, в которых используется техника линейных матричных неравенств (ЛМН). Было отмечено, что несмотря на значительные достижения в этой области, проблемы получения конструктивных методов анализа устойчивости остаются открытыми даже для случая линейных систем.

При синтезе дискретного управления для непрерывных систем стремятся обеспечить устойчивость [14, 15] или оптимальное качество по H_2 или H_∞ критериям [16–18]. Способ синтеза динамического регулятора с обратной связью по выходу, обеспечивающего устойчивость для класса линейных непрерывных систем с апериодическими импульсами, предложен в [14]. В [15] решается задача синтеза дискретного робастного управления на основе наблюдателя из условий устойчивости, установленных с использованием векторной функции Ляпунова для 2D систем. На основе принципа оптимальности Беллмана в [18] предлагается способ синтеза оптимальных по H_2 и H_∞ динамических регуляторов полного порядка с обратной связью по выходу периодических дискретных данных для линейных инвариантных систем с непрерывным временем. Условия устойчивости и показатели качества линейных систем с дискретными регуляторами сформулированы в виде ЛМН, зависящих от времени, которые могут быть решены численно. В [9] для непрерывных систем с липшицевыми нелинейностями, неопределенными возмущениями и дискретным управлением предложены способы оценивания в виде эллипсоидов, ограничивающих состояния для процессов с начальными данными из заданного эллипсоида. Получены условия ограниченности на конечном интервале в виде разрешимости задачи оптимизации с дифференциально-разностными линейными матричными неравенствами. При кусочно-линейной аппроксимации решения дифференциальных линейных матричных неравенств (ДЛМН) задачи оценивания состояния и синтеза дискретного управления сведены к совокупности задач оптимизации с ЛМН, для численного решения которых применены методы полуопределенного программирования. Развитый в [9] подход был применен в [10–13] для оценивания состояния и синтеза управления нелинейных систем с дискретными измерениями.

Во всех указанных работах по анализу устойчивости, показателей качества и синтезу дискретного управления для непрерывных систем показывается то, что определяющая изменение управления дискретная часть имеет частный вид и представлена, как правило, линейным разностным уравнением с постоянными коэффициентами. При этом не учитываются внешние возмущения, а влияние дискретной подсистемы на непрерывную осуществляется только через управление. В [7] предложено новое условие устойчивости для связанных дифференциально-функциональных уравнений, построен функционал Ляпунова–Красовского для частного случая линейных дифференциально-разностных уравнений со взаимодействием не только по управлению. Условие устойчивости представлено в форме ЛМН, удобной для численного расчета. Там же отмечено, что проблема имеет дополнительные трудности, которые необходимо преодолеть, так как задачи анализа устойчивости и синтеза управления требуют использования смешанных методов непрерывного и дискретного времени из-за гибридного характера всей системы. Кроме того, управление обычно получается в виде разрывной функции в точках выборки дискретной подсистемы. Следует отметить что в последние годы появились работы [19–23], в которых предлагаются другие подходы к решению задач стабилизации дискретно-непрерывных систем.

Цель данной статьи – представить способы оценивания состояния в виде ограничивающего эллипсоида и синтеза дискретного управления для класса непрерывно-дискретных систем с липшицевыми нелинейностями и неопределенными ограниченными по норме возмущениями. Предложенный в [24] и развитый в [25, 26] подход с использованием квадратичной функции Ляпунова с изменяющимися коэффициентами и ДЛМН применяется для решения задач оценивания состояния, синтеза дискретного управления для указанного класса систем. В результате задачи оценивания состояния на конечном интервале и синтеза дискретного управления сводятся к совокупности задач оптимизации с ЛМН, получающихся при кусочно-линейной аппроксимации решения ДЛМН [27]. Результаты иллюстрируются на примере.

2. Непрерывно-дискретная система

Рассматривается система, состоящая из непрерывной и дискретной подсистем, взаимодействующих между собой:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= A_1 x_1(t) + \Phi_1 \varphi_1(t, x_1(t)) + A_{12} x_2(t_k) + D_1 w_1(t), \\
x_2(t_{k+1}) &= A_2 x_2(t_k) + \Phi_2 \varphi_2(t_k, x_2(t_k)) + A_{21} x_1(t_k) + D_2 w_2(t_k),
\end{aligned}
\tag{1}
$$

где $x_1 \in \mathrm{R}^{n_1}$ – вектор состояния непрерывной подсистемы, $x_2 \in R^{n_2}$ – вектор состояния дискретной подсистемы, $x_2(t) = x_2(t_k)$ при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $t_k \in \Theta =$ $= \{t_k,\ t_k = t_{k-1} + h,\ k = 1, \ldots, N\}$, h – шаг изменения дискретного времени,

$w_1(t) \in \mathrm{W}_1 \subset \mathrm{R}^{r_1}$, $w_2(t) \in \mathrm{W}_2 \subset \mathrm{R}^{r_2}$ – векторы неопределенных внешних возмущений, $A_i \in \mathrm{R}^{n_i \times n_i}$, $A_{12} \in \mathrm{R}^{n_1 \times n_2}$, $A_{21} \in \mathrm{R}^{n_2 \times n_1}$, $D_i \in \mathrm{R}^{n_i \times r_i}$, $\Phi_i \in \mathrm{R}^{n_i \times q_i}$ – известные матрицы с постоянными элементами, $t \in T$, $T = [t_0, t_N]$, t_0, t_N – начальный и конечный моменты времени.

Нелинейные векторные функции $\varphi_i(t, x_i)$ являются непрерывными, ограниченными и удовлетворяют условию

$$\|\varphi_i(t, x_i)\|^2 \leqslant \mu_i \|C_{fi} x_i\|^2 \quad \forall t \in T, \ \ x_i \in \mathrm{R}^{n_i}, i = 1, 2, \tag{2}$$

где $C_{fi} \in \mathrm{R}^{q_i \times n_i}$ – известные матрицы с постоянными элементами. Здесь и далее $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора, $\mu_i > 0$, $i = 1, 2$ – известные константы.

Неопределенные возмущения являются непрерывными ограниченными в каждый момент времени функциями:

$$W_i = \left\{ w_i(t) \in \mathrm{R}^{r_i} : \|w_i(t)\|^2 \leqslant 1 \ \ \forall t \in T \right\}, \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

3. Задача оценивания состояния

Пусть в начальный момент времени состояния $x_i(t_0) = x_{i0}$ непрерывной и дискретной подсистем принадлежат заданным эллипсоидам

$$E(Q_{i0}) = \left\{ x_i \in \mathrm{R}^{n_i} : x_i^{\mathrm{T}} Q_{i0}^{-1} x_i \leqslant 1 \right\}, \tag{4}$$

где $Q_{i0} (i = 1, 2)$ – заданные положительно определенные матрицы.

Обозначим: $x(t) = (x_1^{\mathrm{T}}(t), x_2^{\mathrm{T}}(t) = x_2^{\mathrm{T}}(t_k))^{\mathrm{T}}$ – вектор состояния непрерывно-дискретной системы.

Введем следующее

Определение 1. Эллипсоид $E(Q_x(t)) = \{x \in \mathrm{R}^n : x^{\mathrm{T}} Q_x^{-1}(t) x \leqslant 1\}$ является ограничивающим для процессов $x(t, t_0, x_0)$ непрерывно-дискретной системы (1), стартующих из начального эллипсоида $E(Q_{x0} = \mathrm{diag}(Q_{10}, Q_{20}))$, если $x(t, t_0, x_0) \in E(Q_x(t))$ при всех $t \in [t_0, t_N]$, нелинейностях из (2) и возмущениях из (3).

Решается следующая

Задача 1. Требуется найти на рассматриваемом интервале $[t_0, t_N]$ матрицу $Q_x(t)$ эллипсоида $E(Q_x(t))$, ограничивающего множество процессов исходной системы (1) с начальными данными из (4), нелинейностями из (2) и возмущениями из (3).

Отметим, что ограничивающий эллипсоид будет представлять собой верхнюю оценку области достижимости рассматриваемой системы.

Для решения данной задачи введем расширенный вектор состояния $z(t) = (x_1^{\mathrm{T}}(t), x_2^{\mathrm{T}}(t) = x_2^{\mathrm{T}}(t_k), x_3^{\mathrm{T}}(t) = x_1^{\mathrm{T}}(t_k))^{\mathrm{T}}$, на интервалах непрерывности $[t_k, t_k + h)$ компоненты $x_1(t)$ которого изменяются согласно уравнению (1), а компоненты $x_2(t), x_3(t)$ остаются постоянными. В дискретные моменты $t_k \in \Theta$ компоненты $x_2(t)$, $x_3(t)$ изменяются скачком согласно уравнению (2) и соотношению $x_3(t_k) = x_1(t_k)$. Теперь исходную непрерывно-дискретную систему (1) можно представить в виде непрерывной системы (5) с импульсами (6):

$$\dot{z}(t) = A_{z1}z + \Phi_{z1}\varphi(t, z(t)) + D_{z1}w(t), \quad t \neq t_k, \tag{5}$$

$$z(t_{k+1}) = A_{z2}z(t_k) + \Phi_{z2}\varphi(t_k, z(t_k)) + D_{z2}w(t_k), \quad t_k \in \Theta, \tag{6}$$

где

$$w(t) = \left(w_1^{\mathrm{T}}(t), w_2^{\mathrm{T}}(t)\right)^{\mathrm{T}}, \quad A_{z1} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & A_{12} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{z1} = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{z1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad A_{z2} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & A_{21} \\ I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{z2} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \Phi_{z2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

При этом

$$z(t_0) = z_0 = (x_{10}^{\mathrm{T}}, x_{20}^{\mathrm{T}}, x_{10}^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}} \in E(Q_0), \quad Q_0 = \mathrm{diag}(Q_{10}, Q_{20}, Q_{10}),$$
$$x_1(t) = C_1 z(t), \quad x_2(t) = C_2 z(t),$$
$$C_1 = (\; I_{n_1} \quad 0_{n_1\times(n_2+n_1)} \;), \quad C_2 = (\; 0_{n_2\times n_1} \quad I_{n_2} \quad 0_{n_2\times n_1} \;),$$

I_{n_i} – единичная $(n_i \times n_i)$-матрица $(i = 1, 2)$.

Сначала будем решать задачу нахождения матрицы $Q(t)$ эллипсоида, ограничивающего состояния расширенной системы (5), (6). При этом матрица $Q_x(t)$ определится как $Q_x = C_{12}Q(t)C_{12}^{\mathrm{T}}$, где $C_{12} = (C_1^{\mathrm{T}}, C_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

На интервалах непрерывности $[t_k, t_{k+1})$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ для нахождения матрицы $Q(t)$ эллипсоида $E(Q(t))$, ограничивающего состояния расширенной системы, будут использоваться теоремы 1 и 2 из [25], которые здесь приводятся в единой формулировке для рассматриваемого ограничения на нелинейности.

Теорема 1 (см. [25]). *Для того чтобы эллипсоид $E(Q(t))$ являлся ограничивающим для траекторий системы (5), стартующих из начального эллипсоида $E(Q_k)$, достаточно выполнения при $t \in [t_k, t_{k+1})$, $\beta_1 > 0$, $\alpha_1 > 0$ одного из условий*:

1) *существует решение $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k) > 0$ дифференциального матричного уравнения*

$$\begin{aligned} dQ(t)/dt = A_{z1}Q + QA_{z1}^{\mathrm{T}} + \alpha_1 Q + \frac{1}{\alpha_1}D_{z1}D_{z1}^{\mathrm{T}} + \\ + \beta_1\Phi_{z1}\Phi_{z1}^{\mathrm{T}} + \frac{\mu_1}{\beta_1}QC_1^{\mathrm{T}}C_{f1}^{\mathrm{T}}C_{f1}C_1Q; \end{aligned} \tag{7}$$

2) *существует решение* $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k) > 0$ *дифференциального линейного (при фиксированном* $\alpha_1 > 0$*) матричного неравенства*

$$\text{(8)}\quad \begin{bmatrix} -dQ(t)/dt + A_{z1}Q + QA_{z1}^{\mathrm{T}} + \alpha_1 Q + \beta_1 \Phi_{z1}\Phi_{z1}^{\mathrm{T}} & D_{z1} & QC_1^{\mathrm{T}}C_{f1}^{\mathrm{T}} \\ D_{z1}^{\mathrm{T}} & -\alpha_1 I & 0 \\ C_{f1}C_1 Q & 0 & -\dfrac{\beta_1}{\mu_1} I \end{bmatrix} \leqslant 0.$$

Здесь $Q(t_0) = Q_0$.

Доказательство теоремы 1 представлено в [25].

В [9] получены аналитические выражения для свободных параметров β_1, α_1:

$$\beta_1(Q(t)) = +\sqrt{\frac{\mu_1 \mathrm{trace}(Q(t)C_1^{\mathrm{T}}C_{f1}^{\mathrm{T}}C_{f1}C_1Q(t))}{\mathrm{trace}(\Phi_{z1}\Phi_{z1}^{\mathrm{T}})}},$$

$$\alpha_1(Q(t)) = \sqrt{\frac{\mathrm{trace}(D_{z1}D_{z1}^{\mathrm{T}})}{\mathrm{trace}(Q(t))}},$$

при которых получаются локально оптимальные оценки по критерию следа матрицы $Q(t) = Q(t, t_k, Q_k)$, определяющего сумму длин полуосей ограничивающего эллипсоида.

Процедура для вычисления матрицы $Q(t)$ эллипсоида, ограничивающего состояния (5) с использованием ДЛМН (8), сводится (при каждом фиксированном α_1 и варьируемой переменной β_1) в результате дискретизации к совокупности задач оптимизации $\mathrm{trace}(Q(t_k)) \to \min_{Q(t_k),\beta_1(t_k)}$ с ограничениями в виде ЛМН, представлена в конце данного раздела.

В моменты t_{k+1}, $k = 0, \ldots, N-1$ поведение системы представлено разностным уравнением (6). В этом случае для вычисления матрицы $Q(t_{k+1})$ эллипсоида, ограничивающего состояния расширенной системы в дискретные моменты времени t_{k+1}, будет использоваться теорема 1 из [26], которая здесь приводится применительно к разностному уравнению (6).

Теорема 2 (см. [26]). *Для того чтобы эллипсоид* $E(Q(t_{k+1}))$ *ограничивал состояния системы в момент* t_{k+1} *при условии, что* $z(t_k) \in E(Q(t_k))$, *достаточно выполнения при* $0 < \alpha_2 < 1$ *одного из условий*:

1) *существует решение* $Q(t_{k+1}) > 0$ *разностного матричного уравнения*

$$\text{(9)}\quad \begin{aligned} Q(t_{k+1}) = A_{z2}Q(t_k)\left[\alpha_2 Q(t_k) - \frac{\mu_2}{\beta_2}Q(t_k)C_2^{\mathrm{T}}C_{f2}^{\mathrm{T}}C_{f2}C_2Q(t_k)\right]^{-1} Q(t_k)A_{z2}^{\mathrm{T}} + \\ + \frac{1}{1-\alpha_2}D_{z2}D_{z2}^{\mathrm{T}} + \beta_2\Phi_{z2}\Phi_{z2}^{\mathrm{T}}; \end{aligned}$$

2) *существует решение* $Q(t_{k+1}) > 0$ *разностного линейного матричного неравенства (РЛМН)*

$$(10)\qquad \begin{bmatrix} Q(t_{k+1}) - \beta_2\Phi_{z2}\Phi_{z2}^{\mathrm{T}} & A_{z2}Q(t_k) & D_{z2} & 0 \\ Q(t_k)A_{z2}^{\mathrm{T}} & \alpha_2 Q(t_k) & 0 & Q(t_k)C_2^{\mathrm{T}}C_{f2}^{\mathrm{T}} \\ D_{z2}^{\mathrm{T}} & 0 & (1-\alpha_2)I & 0 \\ 0 & C_{f2}C_2Q(t_k) & 0 & \dfrac{\beta_2}{\mu_2}I \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Доказательство теоремы для дискретной системы (6) с нелинейностями из (2) и неопределенными возмущениями из (3) представлено в [26].

Будем предполагать, что дискретное время изменяется с постоянным шагом $t_{k+1} - t_k = h = \mathrm{const}$, $k = 1, \ldots, N$. Отметим, что случай изменения дискретного времени с изменяющимся, но известным шагом h_k может быть рассмотрен аналогично. Случай, когда h_k неизвестны и могут изменяться в заданном диапазоне $h_k \in [h_{\min}, h_{\max}]$, требует отдельного рассмотрения.

Итак, для непрерывно-дискретой системы, в которой дискретное время изменяется с постоянным шагом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. Эллипсоид $E(Q(t))$, *где* $Q(t) = Q(t, t_0, Q_0)$ *– решение матричной системы дифференциально-разностных уравнений* (7), (9) *или задачи оптимизации* $\mathrm{trace}(Q(t, t_0, Q_0)) \to \min$ *с ограничениями ДЛМН* (8) *и РЛМН* (10), *будет ограничивающим для состояний системы* (5), (6) *и состояний исходной непрерывно-дискретой системы* (1) *при всех нелинейностях из* (2) *и возмущениях из* (3).

Доказательство основывается на последовательном применении теоремы 1 на интервалах непрерывности $[t_k, t_{k+1})$ $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ для получения матрицы $Q(t, t_k, Q(t_k)) > 0$ эллипсоида, ограничивающего состояние $z(t, t_k, z(t_k))$ системы (5), (6) с начальными данными из эллипсоида с матрицей $Q(t_k)$ при всех нелинейностях из (2) и возмущениях из (3), и применении теоремы 2 в точках t_{k+1}, $(k = 0, 1, \ldots, N-1)$ для получения матрицы $Q(t_{k+1}) > 0$, ограничивающей состояние $z(t_{k+1}, t_k, z(t_k))$ системы (5), (6) в момент t_{k+1} при условии $z(t_k)) \in E(Q(t_k))$.

Таким образом, при периодическом изменении дискретного времени состояние системы (5), (6) с начальными данными из эллипсоида $E(Q_0)$ будет ограничено эллипсоидом с матричной функцией $Q(t, t_0, Q_0)$, являющейся решением матричной системы сравнения (7) с импульсами (9) или задачи оптимизации $\mathrm{trace}(Q(t, t_0, Q_0)) \to \min$ с ограничениями ДЛМН (8) и РЛМН (10) при $t \in T$. При этом матрица $Q_x(t, t_0, Q_0)$ определится как $Q_x(t, t_0, Q_0) = C_{12}Q(t, t_0, Q_0)C_{12}^{\mathrm{T}}$, где $C_{12} = (C_1^{\mathrm{T}}, C_2^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$.

При численном решении задачи оптимизации с ДЛМН (8) проводится дискретизация на рассматриваемом интервале $[t_0, t_N]$ [27]. Производная $dQ(t)/dt$ на интервалах $[t_k, t_{k+1})$ считается постоянной и представляется как $dQ(t)/dt = Z(t_k)$, где $t_k = t_0 + kh$, $k = 1, \ldots, N$, и N есть целая часть отношения $(t_N - t_0)/h$. Тогда для $t \in [t_k, t_{k+1})$ матрица $Q(t)$ определится как

$$Q(t) = Q(t_k) + (t - t_k)Z(t_k), \tag{11}$$

причем $Q(t_0) = Q_0$. Для того чтобы матрица $Q(t)$ удовлетворяла неравенству $Q(t) > 0$ и ДЛМН (8) при всех $t \in [t_k, t_{k+1})$, необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла им в двух крайних точках t_k и $t_k + h$, т.е. при каждом $k = 0, \ldots, N-1$ одновременно должны выполняться неравенства [27]:

$$Q(t_k) > 0, \quad Q(t_k + h) > 0, \tag{12}$$

$$\begin{bmatrix} -Z(t_k) + F(Q(t_k)) + \beta_1 \Phi_{z1}\Phi_{z1}^{\mathrm{T}} & D_{z1} & Q(t_k)C_1^{\mathrm{T}}C_{f1}^{\mathrm{T}} \\ D_{\mathrm{z}1}^{\mathrm{T}} & -\alpha_1 I & 0 \\ C_{f1}C_1Q(t_k) & 0 & -\dfrac{\beta_1}{\mu_1}I \end{bmatrix} \leqslant 0, \tag{13}$$

$$\begin{bmatrix} -Z(t_k) + F(Q(t_k + h)) + \beta_1 \Phi_{z1}\Phi_{\mathrm{z}1}^{\mathrm{T}} & D_{z1} & Q(t_k + h)C_1^{\mathrm{T}}C_{f1}^{\mathrm{T}} \\ D_{\mathrm{z}1}^{\mathrm{T}} & -\alpha_1 I & 0 \\ C_{f1}C_1Q(t_k + h) & 0 & -\dfrac{\beta_1}{\mu_1}I \end{bmatrix} \leqslant 0, \tag{14}$$

где $Q(t_k + h) = Q(t_k) + hZ(t_k) = Q(t_{k+1} - 0)$, $F(G) = A_{z1}G + GA_{z1}^{\mathrm{T}} + \alpha_1 G$.

В результате линейной аппроксимации (11) решения ДЛМН (8) нахождение матрицы $Q(t) > 0$ эллипсоида, ограничивающего состояния системы сводится к последовательному решению совокупности задач оптимизации: $\mathrm{trace}(Q(t_{k+1})) \to \min_{Q(t_{k+1})>0, \beta_1(t_{k+1})>0}$ при ЛМН ограничениях (10), (12)–(14) для $k = 0, \ldots, N-1$. На первой итерации при $k = 0$ по заданной матрице $Q(t_0) = Q_0$ в результате решения указанной задачи оптимизации с ЛМН вычисляются матрицы $Q(t_0 + h)$ и $Q(t_1)$ с минимальным следом, которые определяют матрицу эллипсоида, ограничивающую состояния системы (5), (6) на интервале $[t_0, t_1]$. Затем при $k = 1, \ldots, N-1$ по матрице $Q(t_k)$ вычисляются матрицы $Q(t_k + h)$ и $Q(t_{k+1})$, которые определяют матрицу эллипсоида, ограничивающую состояния системы (5), (6) на последующих интервалах $[t_k, t_{k+1}]$.

Следует отметить, что для численного решения на каждой итерации задач оптимизации с ЛМН могут использоваться существующие программные средства полуопределенного программирования (CVX, Sedumi, Yalmip и др.).

4. Задача синтеза дискретного управления, обеспечивающего подавление начальных отклонений и неопределенных возмущений непрерывно-дискретной системы

Рассматривается непрерывно-дискретная система (1) с дискретным управлением:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= A_1x_1(t) + B_1u(t_k) + \Phi_1\varphi_1(t, x_1(t)) + A_{12}x_2(t_k) + D_1w_1(t), \\ x_2(t_{k+1}) &= A_2x_2(t_k) + B_2u(t_k) + \Phi_2\varphi_2(t_k, x_2(t_k)) + A_{21}x_1(t_k) + D_2w_2(t_k). \end{aligned} \tag{15}$$

З а д а ч а 2. Задача состоит в нахождении управления в виде обратной связи по состоянию, доступному в дискретные моменты времени t_k, $k = 0, 1, \ldots, N-1$, стабилизирующего замкнутую систему и подавляющего начальные отклонения и воздействие внешних возмущений в смысле минимальности ограничивающего эллипсоида для состояний непрерывно-дискретной системы.

Управление для каждой подсистемы берется в форме обратной связи по состоянию всей системы в моменты времени t_k

$$u_i(t) = K_{i1}(t_k)x_1(t_k) + K_{i2}(t_k)x_2(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}), \quad i = 1, 2. \tag{16}$$

Здесь $K_{ij}(t_k) - (m_i \times n_j)$, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$ – матрицы коэффициентов усиления дискретных регуляторов, $k = 0, 1, \ldots, N-1$.

Управление $u_i(t)$ должно удовлетворять ограничению

$$u_i(t) \in \left\{u_i : u_i^{\mathrm{T}} U_i^{-1} u_i \leqslant 1\right\}, \quad t \in T, \tag{17}$$

где U_i – заданная симметрическая положительно определенная $(m_i \times m_i)$-матрица $(i = 1, 2)$.

Представим систему (15) с дискретным управлением (16) в следующем виде:

$$\dot{z}(t) = A_{z1}z + \Phi_{z1}\varphi_1(t, z(t)) + D_{z1}w(t), \quad t \neq t_k, \tag{18}$$

$$z(t_{k+1}) = A_{z2}z(t_k) + \Phi_{z2}\varphi_2(t_k, z(t_k)) + D_{z2}w(t_k), \quad t_k \in \Theta, \tag{19}$$

где $z(t) = (x_1^{\mathrm{T}}(t), x_2^{\mathrm{T}}(t_k), x_1^{\mathrm{T}}(t_k), u^{\mathrm{T}}(t_k))^{\mathrm{T}}$– вектор состояния размерности $n = n_1 + n_2 + n_1 + m$, $u(t_k) = (u_1^{\mathrm{T}}(t_k),\ u_2^{\mathrm{T}}(t_k))^{\mathrm{T}}$ – вектор управления размерности $m = m_1 + m_2$, $t \in [t_k, t_{k+1})$,

$$A_{z1} = \begin{bmatrix} A_1 & A_{12} & 0 & B_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{z2} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & A_{21} & B_2 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{12} & K_{11} & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{z1} = \begin{bmatrix} \Phi_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{z1} = \begin{bmatrix} D_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_{z2} = \begin{bmatrix} 0 \\ \Phi_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{z2} = \begin{bmatrix} 0 \\ D_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} K_{12}(t_k) & K_{11}(t_k) \\ K_{22}(t_k) & K_{21}(t_k) \end{bmatrix}.$$

Задача синтеза управления для системы (18), (19) с учетом рассмотренного в разделе 3 способа численного решения ДЛМН (8) сводится к задаче оптимизации при ограничениях в виде разностных линейных матричных неравенств. В качестве критерия берется след матрицы $Q(t_k)$, определяющий размер эллипсоида $E(Q(t_k))$, ограничивающего состояния $z(t_k)$ для всех $t_k,\ k = 1,\dots,N$.

Матрица K коэффициентов усиления регуляторов входит только в разностное уравнение (6). Представим (6) в следующем виде:

$$z(t_{k+1}) = (\bar{A}_{z2} + \bar{B}KC)z(t_k) + \Phi_{z2}\varphi(t_k, z(t_k)) + D_{z2}w(t_k), \quad t_k \in \Theta, \tag{20}$$

где $\bar{A}_{z2} = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & A_{21} & B_2 \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\bar{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ I_{m_1} & 0 \\ 0 & I_{m_2} \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 0 & I_{n_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n_1} & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Справедлива следующая

Т е о р е м а 4. *Пусть при некоторых $\alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2 > 0$ и всех $t_k,\ k = 0, 1, \dots, N-1$ найдется решение $Q(t_{k+1}) > 0$, $Q(t_{k+1} - 0) = Q(t_k + h) = Q(t_k) + hZ(t_k) > 0$, $Y(t_k)$ задачи*

$$\operatorname{trace}[Q(t_{k+1})] \to \min$$

при ограничениях (12)–(14) *и* (21), (22):

$$\begin{bmatrix} Q(t_{k+1}) - \beta_2\Phi_{z2}\Phi_{z2}^{\mathrm{T}} & \bar{A}_{z2}Q(t_k)C^{\mathrm{T}} + BY_k & D_{z2} & 0 \\ CQ(t_k)\bar{A}_{z2}^{\mathrm{T}} + Y_k^{\mathrm{T}}\bar{B}^{\mathrm{T}} & \alpha_2 CQ(t_k)C^{\mathrm{T}} & 0 & CQ(t_k)C_2^{\mathrm{T}}C_{f2}^{\mathrm{T}} \\ D_{z2}^{\mathrm{T}} & 0 & (1-\alpha_2)I & 0 \\ 0 & C_{f2}C_2Q(t_k)C^{\mathrm{T}} & 0 & \dfrac{\beta_2}{\mu_2}I \end{bmatrix} \geqslant 0, \tag{21}$$

$$\begin{pmatrix} U & Y_k \\ Y_k^{\mathrm{T}} & CQ(t_k)C^T \end{pmatrix} \geqslant 0, \tag{22}$$

где минимизация проводится по матричным переменным $Q(t_{k+1}) \in \mathrm{R}^{n\times n}$, $Y_k \in \mathrm{R}^{m\times(n_2+n_1)}$, $Z(t_k) \in \mathrm{R}^{n\times n}$, скалярным переменным $\beta_1(t_k)$, $\beta_2(t_k) > 0$. Тогда матрица коэффициентов дискретного управления по состоянию, стабилизирующего непрерывно-дискретную систему, определится как $K(t_k) = Y_k(CQ(t_k)C^{\mathrm{T}})^{-1}$. При этом ошибки стабилизации будут оцениваться ограничивающим для вектора состояния $z(t)$ эллипсоидом, матрица $Q(t)$ которого определится согласно (11).

Отметим, что матрица $CQ(t_k)C^{\mathrm{T}}$ будет положительно определенной, так как является средним блоком размерности $(n_2+n_1)\times(n_2+n_1)$ матрицы $Q(t_k)$.

5. Иллюстративный пример

Рассматривается непрерывно-дискретная система (15) с нелинейностями $\varphi_i(x_i)$, $i = 1, 2$ из (2), возмущениями $w_i(t)$, $i = 1, 2$ из (3) и следующими значениями параметров:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -5{,}04 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1{,}36 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1{,}87 \end{bmatrix}, \quad D_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ -0{,}95 \end{bmatrix},$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0{,}5 & 0 \\ 1 & 1{,}25 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\Phi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$\mu_1 = 1, \quad \mu_2 = 0{,}5, \quad C_{f1} = C_{f2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Решается задача синтеза дискретного управления, обеспечивающего на конечном интервале стабилизацию при максимальном периоде дискретности h.

На основе теоремы 4 и численного решения при $q_1 = 0{,}03$, $q_2 = 0{,}79$, $Q_0 = \mathrm{diag}\{\, 0{,}5 \;\; 0{,}5 \;\; 0{,}5 \;\; 0{,}5 \;\; 0{,}5 \;\; 0{,}5 \;\; 0 \;\; 0 \,\}$ совокупности задач оптимизации с ЛМН ограничениями и периоде дискретности $h = 2{,}5$ с получен регулятор (16) с переменными коэффициентами $K(t_k)$. Изменения коэффициентов усиления регуляторов на рассматриваемом интервале [0, 60 с] для непрерывной и дискретной подсистем показаны на рис. 1.

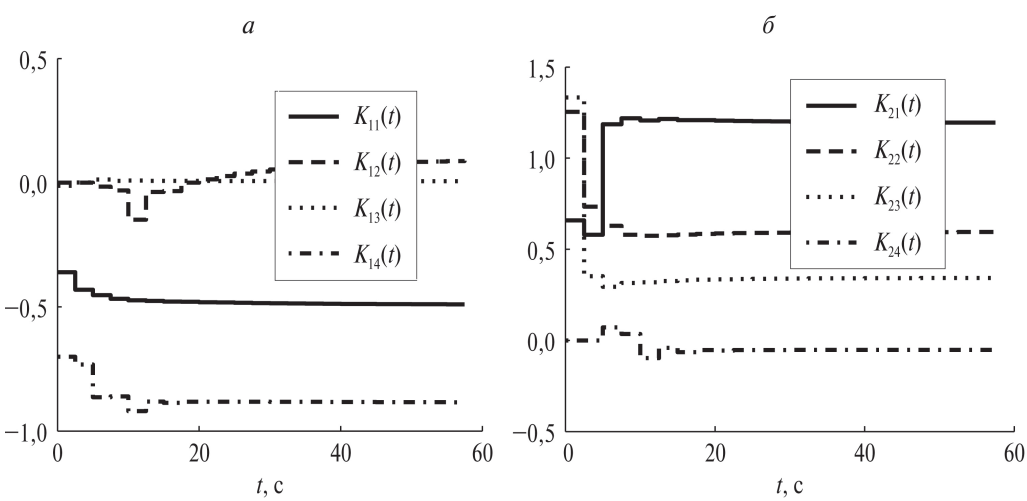

Рис. 1. Изменения коэффициентов усиления регулятора: *а* – для непрерывной подсистемы; *б* – для дискретной подсистемы.

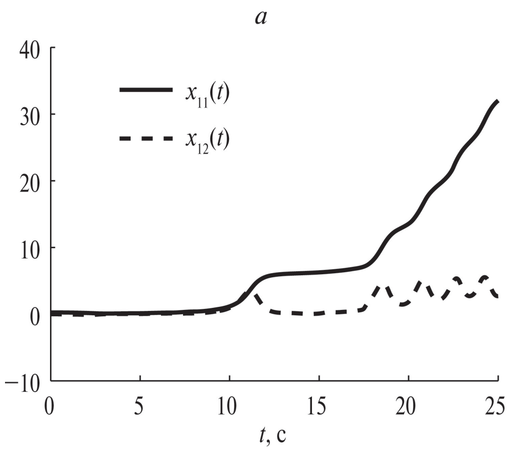

Рис. 2. Изменения координат состояния системы без регулятора и возмущений: *а* – непрерывной подсистемы; *б* – дискретной подсистемы.

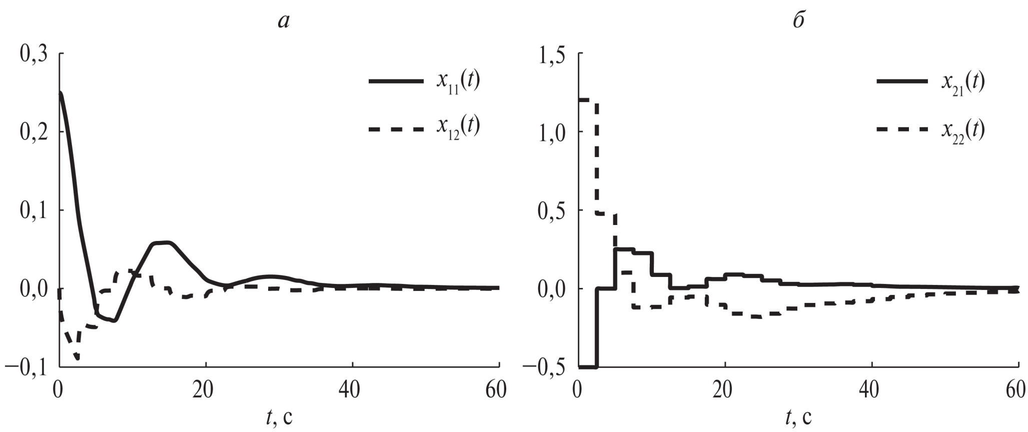

Рис. 3. Изменение координат состояния без учета возмущений: *а* – непрерывной подсистемы; *б* – дискретной подсистемы.

Моделирование рассматриваемой дискретно-непрерывной системы проводилось при конкретных нелинейностях $\varphi_1(x_1) = \sin(C_{f1}x_1)$, $\varphi_2(x_2) = 0{,}7071\,|C_{f2}x_2|$, удовлетворяющих условию (2). Результаты моделирования системы без регулятора и возмущений с периодом дискретности $h = 2{,}5$ с показаны на рис. 2. Из графиков видно, что система без регулятора является неустойчивой.

Проведено моделирование непрерывно-дискретной системы с полученным регулятором при различных начальных условиях. На рис. 3 представлены переходные процессы в непрерывной и дискретной подсистемах с полученным регулятором при начальных условиях $x_0 = \begin{bmatrix} 0{,}25 & 0 & -0{,}5 & 1,2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$ без возмущений. На рис. 4 показаны переходные процессы в непрерывной и дискретной подсистемах с полученным регулятором при тех же начальных условиях с

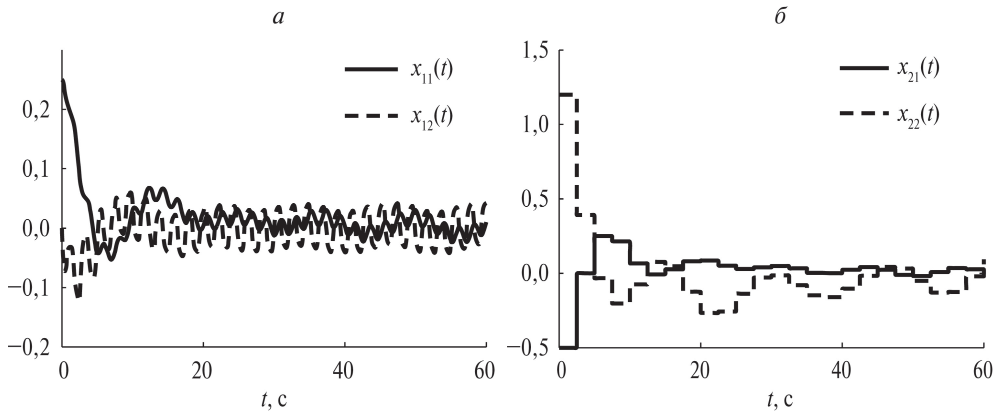

Рис. 4. Изменение координат состояния с учетом возмущений: *а* – непрерывной подсистемы; *б* – дискретной подсистемы.

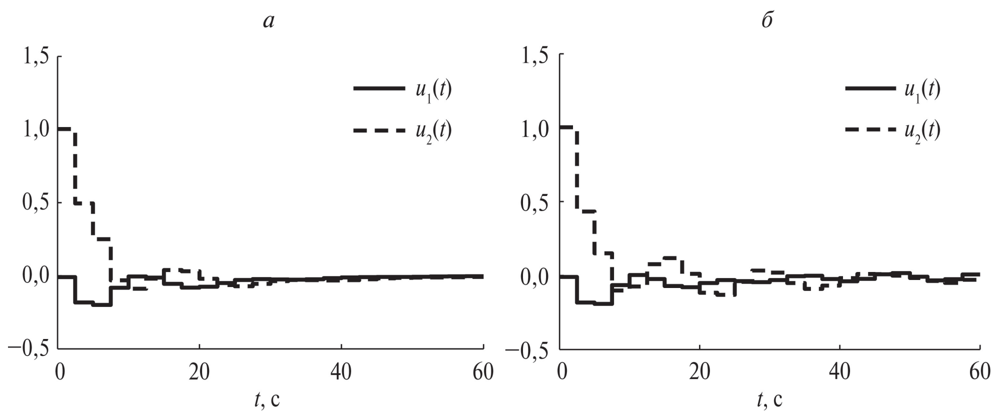

Рис. 5. Изменение управляющего сигнала непрерывной и дискретной подсистем: *а* – без учета возмущений; *б* – с учетом возмущений.

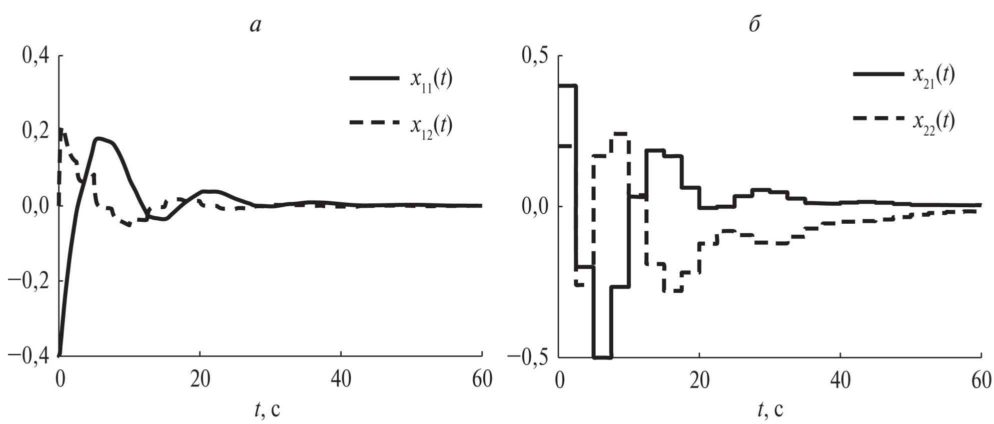

Рис. 6. Изменение координат состояния без учета возмущений с начальными условиями $x_0 = [\ -0{,}4\ \ 0\ \ 0{,}4\ \ 0{,}2\ ]^{\mathrm{T}}$: *а* – непрерывной подсистемы; *б* – дискретной подсистемы.

учетом возмущений, заданных функциями $w_1(t) = \sin(2\cos(3t))/5$ и $w_2(t_k) = \sin(k)/10$. При этом изменения управляющих сигналов непрерывной и дискретной подсистем представлены на рис. 5.

На рис. 6 показаны изменения координат состояния непрерывной и дискретной подсистем, полученные при моделировании с другими начальными условиями: $x_0 = \begin{bmatrix} -0{,}4 & 0 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}}$.

Как видно из рис. 3–6, синтезированный дискретный регулятор обеспечивает стабилизацию рассматриваемой непрерывно-дискретной системы при $h = 2{,}5$ с.

6. Заключение

Для непрерывно-дискретных систем с липшицевыми нелинейностями, неопределенными возмущениями предложены способы оценивания состояния в виде эллипсоидов, ограничивающих состояния для процессов с начальными данными из заданного эллипсоида, и синтеза дискретного управления, обеспечивающего подавление начальных отклонений и влияние неопределенных возмущений. С использованием квадратичной функции Ляпунова с изменяющимися параметрами получены условия ограниченности на конечном интервале в виде разрешимости задачи оптимизации с дифференциально-разностными линейными матричными неравенствами. При кусочно-линейной аппроксимации решения ДЛМН задачи оценивания состояния и синтеза дискретного управления сведены к совокупности задач оптимизации с ЛМН, для численного решения которых применены методы полуопределенного программирования. Результаты применены для оценивания состояния и синтеза дискретного управления, обеспечивающего стабилизацию на конечном интервале конкретной непрерывно-дискретной системы с неопределенными возмущениями.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 4. В случае периодического дискретного управления ($h_k = h = \text{const} > 0$), как показано в разделе 3, задача построения оценки состояния в виде ограничивающего эллипсоида сводится к совокупности задач оптимизации $\operatorname{trace}(Q(t_{k+1})) \to \min$ с ЛМН ограничениями (10), (12)–(14) для всех $k = 0, \ldots, N-1$. С учетом (20) матричное неравенство (10) здесь принимает вид:

$$\begin{bmatrix} Q(t_{k+1}) - \beta_2 \Phi_{z2}\Phi_{z2}^{\mathrm{T}} & (\bar{A}_{z2} + \bar{B}KC)Q(t_k) & D_{z2} & 0 \\ Q(t_k)(\bar{A}_{z2} + \bar{B}KC)^{\mathrm{T}} & \alpha_2 Q(t_k) & 0 & Q(t_k)C_2^{\mathrm{T}}C_{f2}^{\mathrm{T}} \\ D_{z2}^{\mathrm{T}} & 0 & (1-\alpha_2)I & 0 \\ 0 & C_{f2}C_2Q(t_k) & 0 & \dfrac{\beta_2}{\mu_2} I \end{bmatrix} \geqslant 0.$$

Далее, умножая последнее неравенство слева на матрицу $\operatorname{diag}(I, C, I, I)$, а справа – на $\operatorname{diag}(I, C^{\mathrm{T}}, I, I)$ и вводя замену $Y_k = KCQ(t_k)C^{\mathrm{T}}$, приходим к РЛМН (21) относительно матричных переменных $Q(t_{k+1})$ и Y_k. Ограничение на управление (17) обеспечивается ЛМН (22), где $U = \operatorname{diag}(U_1, U_2)$.

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Pinney E.* Ordinary Difference-Differential Equations. University of California Press, 1958.
2. *Bellman R., Cooke K.L.* Differential-Difference Equations. New York; London, 1963.
3. *De la Sen M.* Adaptive Control of Single-Input Single-Output Hybrid Systems Possessing Interacting Discrete- and Continuous-Time Dynamics // Discrete Dynamics in Nature and Society. 2005. No. 3. P. 229–239.
4. *Pepe P.* On the Asymptotic Stability of Coupled Delay Differential and Continuous Time Difference equations // Automatica. 2005. V. 41. No. 1. P. 107–112.
5. *Pepe P., Jiang Z.-P., Fridman E.* A new Lyapunov-Krasovskii Methodology for Coupled Delay Differential and Difference Equations // Int. J. Control. 2008. V. 81. No. 1. P. 107–115.
6. *Marchenko V.M., Loiseau J.-J.* On the Stability of Hybrid Difference-Differential Systems // Differential Equations. 2009. V. 45. No. 5. P. 743–756.
7. *Gu K., Liu Y.* Lyapunov–Krasovskii Functional for Uniform Stability of Coupled Differential-functional Equations // Automatica. 2009. V. 45. P. 798–804.
8. *Hetel L., Fiter C., Omran H., Seuret A., Fridman E., Richard J.-P., Niculescu S.* Recent developments on the stability of Systems with Aperiodic Sampling: An Overview // Automatica. 2017. V. 76. P. 309–335.
9. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация нелинейных систем с дискретным управлением и неопределенными возмущениями // АиТ. 2021. № 4. С. 96–120.

   Malikov A.I. State Estimation and Stabilization of Nonlinear Systems with Sampled-Data Control and Uncertain Disturbances // Autom. Remote Control. 2021. V. 82. No. 4. P. 634–653.
10. *Malikov A.I.* State Observer for Continuous Lipschitz Systems with Dicrete Measurements and Uncertain Disturbances // Lobachevskii J. Math. 2021. V. 42. No. 9. P. 2172–2178.
11. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и управление линейных апериодических импульсивных систем при неопределенных возмущениях // Изв. ВУЗов. Математика. 2021. № 6. С. 43–54.

    Malikov A.I. State Estimation and Control for Linear Aperiodic Impulsive Systems with Uncertain Disturbances // Russian Mathematics. 2021. V. 65. No. 6. P. 36–46.
12. *Malikov A.I.* State Estimation of the Nonlinear Lipschitz Systems with Impulses under Uncertain Disturbances // Lobachevskii J. Math. 2022. V. 43. No. 5. P. 1152–1158.
13. *Malikov A.I.* Observer Based Control for Continuous Systems with Discrete Measurements and Uncertain Disturbances // Lobachevskii J. Math. 2023. V. 44. No. 5. P. 1728–1737.

14. *Holicki T. Carsten W. Scherer C.W.* Output Feedback Synthesis for a Class of Aperiodic Impulsive Systems // IFAC PapersOnLine. 2020. V. 53. Is. 2. P. 7299–7304.

15. *Rios H., Hetel L., Efimov D.* Robust Output-Feedback Control for Uncertain Linear Sampled-Data Systems: A 2D Impulsive System Approach // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems. 2019. P. 177–201.

16. *Hu L.S., Lam J., Cao Y.Y., Shao H.H.* An LMI Approach to Robust H2 Sampled-Data Control for Linear Uncertain Systems // IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics, Part B: Cybernetics. 2003. V. 33. No. 1. P. 149–155.

17. *Kim J.H., Hagiwara T.* Extensive Theoretical/Numerical Comparative Studies on H2 and Generalized H2 Norms in Sampled-data Systems // Int. J. Control. 2017. V. 90. No. 11. P. 2538–2553.

18. *Geromel J.C., Colaneri P., Bolzern P.* Differential Linear Matrix Inequality in Optimal Sampled-Data Control // Automatica. 2019. V. 100. P. 289–298.

19. *Бирюков Р.С.* Обобщенное H_2-управление линейным непрерывно-дискретным объектом на конечном горизонте // АиТ. 2020. № 8. С. 40–53.
Birukov R.S. Generalized H_2-optimal Control of Continuous-discrete Linear Plant on Finite Horizont // Autom. Remote Control. 2020. V. 81. No. 8. P. 1394–1404.

20. *Марченко В.М., Борковская И.М.* К вопросу о стабилизации скалярных гибридных дифференциально-разностных систем // Труды БГТУ. 2020. Серия 3. № 2. С. 5–11.

21. *Rasina I.V., Fesko O.V., Usenko O.V.* Analytical Design of Controllers for Discrete-continuous Systems with Linear Control // Program. Syst. Theor. Appl. 2021. V. 12. No. 2(49). P. 121–135.

22. *Taousser F.Z., Djouadi S.M., Tomsovic K.* A Dwell Time Approach for the Stabilization of Mixed Continuous/Discrete switched systems // Automatica. 2022. V. 142. Article 110386.

23. *Акманова С.В.* О стабилизации нелинейных непрерывно-дискретных динамических систем с постоянным шагом дискретизации // АиТ. 2024. № 9. С. 41–58.
Aktanova S.V. Stabilization of Nonlinear Continuous-Discrete Dynamic Systems with a Constant Sampling Step // Autom. Remote Control. 2024. V. 85. No. 9. P. 864–878.

24. *Amato F., Ambrosino R., Ariola M., Cosentino C., De Tommasi G.* Finite Time Stability and Control. London: Springer-Verlag, 2014.

25. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация непрерывных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // АиТ. 2016. № 5. С. 19–36.
Malikov A.I. State Estimation and Stabilization of Continuous Systems with Uncertain Nonlinearities and Disturbances // Autom. Remote Control. 2016. V. 77. No. 5. P. 764–778.

26. *Маликов А.И.* Оценивание состояния и стабилизация дискретных систем с неопределенными нелинейностями и возмущениями // АиТ. 2019. № 11. С. 59–82.
Malikov A.I. State Estimation and Stabilization of Discrete-time Systems with Uncertain Nonlinearities and Disturbances // Autom. Remote Control. 2019. V. 80. No. 11. P. 1976–1995.

27. *Маликов А.И., Дубакина Д.И.* Численные способы решения задач оптимизации с дифференциальными линейными матричными неравенствами // Изв. ВУЗов. Математика, 2020. № 4. С. 74–86.
Malikov A.I., Dubakina D.I. Numerical Methods for Solving Optimization Problems with Differential Linear Matrix Inequalities // Russian Mathematics. 2020. V. 64. No. 4. P. 64–74.

Статья представлена к публикации членом редколлегии Р.А. Мунасыповым.

Поступила в редакцию 04.09.2024

После доработки 21.11.2024

Принята к публикации 10.12.2024